第 33 讲 整数解问题之直接限制法

1. 已知偶函数 $f(x)$ 满足 $f(4+x)=f(4-x)$，$f(0)=0$，且当 $x\in(0,4]$ 时，$f(x)=\dfrac{ln(2x)}{x}$，关于 x 的不等式 $f^2(x)+af(x)>0$ 在 $[-200,200]$ 上有且只有 300 个整数解，求实数 a 的取值范围

【解答】解：偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x)$ 满足 $f(4+x)=f(4-x)$，

$\therefore f(x+4)=f(4-x)=f(x-4)$，

$\therefore f(x)$ 的周期为 8，且 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=4$ 对称.

由于 $[-200,200]$ 上含有 50 个周期，且 $f(x)$ 在每个周期内都是轴对称图形，

$\therefore$ 关于 x 的不等式 $f^2(x)+af(x)>0$ 在 $(0,4]$ 上有 3 个整数解.

当 $x\in(0,4]$ 时，$f'(x)=\dfrac{1-ln2x}{x^2}$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\dfrac{e}{2})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{e}{2},4)$ 上单调递减，

$\because f(1)=ln2$，$f(2)>f(3)>f(4)=\dfrac{ln8}{4}=\dfrac{3}{4}ln2>0$，

$\therefore$ 当 $x=k(k=1,2,3,4)$ 时，$f(x)>0$，

$\therefore$ 当 $a\geqslant 0$ 时，$f^2(x)+af(x)>0$ 在 $(0,4]$ 上有 4 个整数解，不符合题意，

$\therefore a<0$，

由 $f^2(x)+af(x)>0$ 可得 $f(x)<0$ 或 $f(x)>-a$.

显然 $f(x)<0$ 在 $(0,4]$ 上无整数解，

故而 $f(x)>-a$ 在 $(0,4]$ 上有 3 个整数解，分别为 1，2，3.

$\therefore -a\geqslant f(4)=\dfrac{3}{4}ln2$，$-a<f(3)=\dfrac{ln6}{3}$，$-a<f(1)=ln2$，

$\therefore -\frac{ln6}{3} < a \leq -\frac{3}{4}ln2$ □

□□□ D □

2□□□□ x □□□ $\frac{1}{2}x^2 - mx - lnx - m < 0$ □□□ (a,b) □□ $a > 0$ □□□□□ (a,b) □□□□□□□□□□□□□□ m □□□□

□□□□□□□ x □□□ $\frac{1}{2}x^2 - mx - lnx - m < 0$ □□□ $m > \frac{x^2 - 2lnx}{2(x+1)}$ □

□ $\frac{x^2 - 2lnx}{2(x+1)} = f(x)$ □ $x > 0$ □

□ $f'(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 2x - 2 + 2xlnx}{2x(x+1)^2}$ □

□ $u(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 2 + 2xlnx$ □ $u'(x) = 3x^2 + 4x + 2lnx$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□

□□□□ $x_0 \in (0,1)$ □□□ $u'(x_0) = 3x_0^2 + 4x_0 + 2lnx_0 = 0$ □ $2lnx_0 = -3x_0^2 - 4x_0$ □

$u(x_0) = x_0^3 + 2x_0^2 - 2x_0 - 2 + 2x_0lnx_0 = x_0^3 + 2x_0^2 - 2x_0 - 2 + x_0(-3x_0^2 - 4x_0) = -2x_0^3 - 2x_0^2 - 2x_0 - 2 = -2(x_0+1)(x_0^2+1) < 0$ □

u□1□ $= -1 < 0$ □ u□2□ $= 10 + 4ln2 > 0$ □

□□□□ $x_1 \in (1,2)$ □□□ $u(x_1) = 0$ □

□□□□ $f(x)$ □ $(0,x_1)$ □□□□□□ $(x_1$ □ $+\infty)$ □□□□

f□1□ $= \frac{1}{4}$ □ f□2□ $= \frac{2-ln2}{3}$ □

□ □□ x □□□ $\frac{1}{2}x^2 - mx - lnx - m < 0$ □□□ (a,b) □□□ $a > 0$ □

□□□□ (a,b) □□□□□□□□□□□

$\therefore$ □□ m □□□□□ $(\frac{1}{4}, \frac{2-ln2}{3}]$ □

□□□□□□□ $\frac{1}{2}x^2 - mx - m < lnx$ □□ $g(x) = lnx$ □□ $g(x)$ □□ $(1,0)$ □□□ (a,b) □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ 1 □□

$1 < b < 2$ □ $0 < a < 1$ □□□□□□□□□□□□ m □□□□

□□□ C□

3□□□□□□ $f(x)$ □□ $f(4+x)=f(4-x)$ □□□ $x\in(0$□$4]$ □□ $f(x)=\frac{ln(2x)}{x}$ □□□ x□□□□ $f^2(x)+af(x)>0$ □$[-200$□$200]$ □□□□□300 □□□□□□□□ a□□□□□

□□□□□□ $f(x)$ □□□□□ $\therefore f(-x)=f(x)$ □

 $f(4+x)=f(4-x)$ □ $\therefore f(8+x)=f(4-(4+x))=f(-x)=f(x)$ □

$\therefore f(x)$ □□□□ $T=8$ □

□ $x\in(0$□$4]$ □□ $f'(x)=\frac{1-ln(2x)}{x^2}$ □

$\therefore$□ $0<x<\frac{e}{2}$ □□ $f'(x)>0$ □□ $\frac{e}{2}<x,4$ □□ $f'(x)<0$ □

$\therefore f(x)$ □ $(0,\frac{e}{2})$ □□□□□□□ $(\frac{e}{2}$□$4]$ □□□□□□

□ f□1□$=ln2>0$□ f□4□ $=\frac{ln8}{4}=\frac{3ln2}{4}>0$ □□ $f(x)$ □□8 □□□□□□□□

$\therefore$□ x□□□□□ $f(x)>0$ □

 $f^2(x)+af(x)>0$ □$[-200$□$200]$ □□300 □□□□□

$\therefore f^2(x)+af(x)>0$ □$(0$□$4]$ □□3 □□□□□□□□□□□□□□1□2□3□

□ $f(x)+a>0$ □$(0$□$4]$ □□□□□□□1□2□3□

$\therefore \begin{cases} f(3)+a>0 \\ f(4)+a,,0 \end{cases}$ □□ $\begin{cases} \frac{ln6}{3}+a>0 \\ \frac{3ln2}{4}+a,0 \end{cases}$ □□□□ $-\frac{ln6}{3}<a,-\frac{3ln2}{4}$ □

□□□□□ $(-\frac{ln6}{3}$□$-\frac{3ln2}{4}]$ □

4□□□□□ $f(x)=e^x-ax(x>0)$ □□□ $a\in R$□ e□□□□□□□□□

□1□□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□□□□□□□ a □□□ $f(x)\geqslant x^2\ln x$ □□□ $x>0$ □□□□□□□□□□ a □□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□1□ $f'(x)=e^x-a(x>0)$ □

① □ $a\leqslant 1$ □□ $f'(x)>0$ □□□ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

② □ $a>1$ □□ $f'(x)=0$ □□ $x=\ln a$ □

□ $0<x<\ln a$ □□ $f'(x)<0$ □ $f(x)$ □□□□□□ $x>\ln a$ □□ $f'(x)>0$ □ $f(x)$ □□□□□

□□□□□

□ $a\leqslant 1$ □□ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□ $a>1$ □□ $f(x)$ □ $(0,\ln a)$ □□□□□□□ $(\ln a,+\infty)$ □□□□□□

□2□□□ $f(x)=e^x-ax\geqslant x^2\ln x$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□ $\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{a}{x}-\ln x\geqslant 0$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□

□ $h(x)=\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{a}{x}-\ln x(x>0)$ □

□ $h'(x)=\dfrac{(x-2)e^x}{x^3}+\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{(x-2)e^x-(x-a)x}{x^3}$ □

① □ $a=2$ □□ $h'(x)=\dfrac{(x-2)(e^x-x)}{x^3}$ □

□ $e^x>x$ □□ $h(x)$ □ $(0,2)$ □□□□□□□ $(2,+\infty)$ □□□□□□

$\therefore h(x)_{min}=h(2)=\dfrac{e^2}{4}-\ln 2-1>0$ □

$\therefore a=2$ □□□□□

② □ $a>2$□□□ $2<x<a$□□□□ $h(x)$□□□□□□

□ $2<x<a$□ $\therefore x-2>0$□ $x-a<0$□

□ $e^x>x$□ $\therefore (x-2)e^x>(x-a)x$□□ $h'(x)>0$□

$\therefore$ □ $a>2$□□ $h(x)$□ $(2,a)$□□□□□□

□□□ $a=3$□□□□ $h(x)$□ $(2,3)$□□□□□□

□ $2<e<3$□□ $h(e)=e^{e-2}-\frac{3}{e}-1<0$□

$\therefore h(x)\geqslant 0$□□□□□□

□□□□□□□□ a□□□□□ 2□

5□□□□□ $f(x)=\frac{e^x-ax}{x}(x>0)$□□□ $a\in R$□ e□□□□□□□□□

□1□□□□ $f(x)$□□□□□□□ a□□□□□□

□2□□□□□□□□ a□□□ $f(x)\geqslant x\ln x$□□□ $x>0$□□□□□□□□□□ a□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□1□ $f(x)=\frac{e^x-ax}{x}=\frac{e^x}{x}-a$□ $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$□

□ $f'(x)>0$□□ $x>1$□□ $f'(x)<0$□□ $0<x<1$□

$\therefore$□□ $f(x)$□ $(0,1)$□□□□□□□ $(1,+\infty)$□□□□□□

$\therefore f(x)_{min}=f$□1□$=e-a$□

$\therefore$□□ $f(x)$□□□□□□ f□1□<0□

$\therefore a$□□□□□□ $(e,+\infty)$□

□2□□□ $f(x)=\frac{e^x-ax}{x}\geq x\ln x$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□

□□ $\frac{e^x}{x^2}-\frac{a}{x}-\ln x\geq 0$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□

□ $h(x)=\frac{e^x}{x^2}-\frac{a}{x}-\ln x(x>0)$ □

□ $h'(x)=\frac{(x-2)e^x}{x^3}+\frac{a}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{(x-2)e^x-(x-a)x}{x^3}$ □

① □ $a=2$ □□ $h'(x)=\frac{(x-2)(e^x-x)}{x^3}$ □

□ $e^x>x$ □ $h(x)$ □ $(0,2)$ □□□□□□ $(2,+\infty)$ □□□□□

$\therefore h(x)_{min}=h(2)=\frac{e^2}{4}-\ln 2-1>0$ □

$\therefore a=2$ □□□□□□

② □ $a>2$ □□□□ $a>x>2$ □□□□ $h(x)$ □□□□□□

□ $a>x>2$ □ $\therefore x-2>0$ □ $x-a<0$ □

□ $e^x>x$ □ $\therefore (x-2)e^x>(x-a)x$ □□ $h'(x)>0$ □

$\therefore$ □ $a>2$ □□ $h(x)$ □ $(2,a)$ □□□□□□

□ $a=3$ □□□□ $h(x)$ □ $(2,3)$ □□□□

□ $2<e<3$ □□ $h(e)=e^{e-2}-\frac{3}{e}-1<0$ □

$\therefore h(x)\geq 0$ □□□□□□

□□□ a □□□□□□□ 2□

6□□□□□ $A=\{x|x^2+2x-3>0\}$□□□ $B=\{x|x^2-2ax-1\le 0$□$a>0\}$□

□I□□ $a=1$□□ $A\cap B$□

□II□□ $A\cap B$□□□□□□□□□□□□□ a□□□□□□

□□□□□□□I□ $A=\{x|x^2+2x-3>0\}=\{x|x>1$□$x<-3\}$□

□ $a=1$□□□ $x^2-2x-1\le 0$□

□□□ $1-\sqrt{2}\le x\le 1+\sqrt{2}$□□ $B=[1-\sqrt{2}$□$1+\sqrt{2}]$□

$\therefore A\cap B=(1$□$1+\sqrt{2}]$□

□II□ □□ $y=f(x)=x^2-2ax-1$□□□□□ $x=a>0$□

$f(0)=-1<0$□□ $A\cap B$□□□□□□□□□

$\therefore$□□□□□□□□□□□□2□

$\therefore f$□2□≤ 0□ f□3□>0□□ $\begin{cases}4-4a-1\le 0\\9-6a-1>0\end{cases}$□

□□□ $\frac{3}{4}\le a<\frac{4}{3}$□

7□□□□□ $f(x)=\frac{x}{e^x}(x>0)$□

□1□□□□ $f(x)$□□□□□

□2□□□□ $g(x)=f(x)-m$□□□□□□□□□ m□□□□□□

□3□□□□□ $f^2(x)-af(x)>0$□□□□□□□□□□□ a□□□□□□

□□□□□□□1□□□ $f(x)=\frac{x}{e^x}(x>0)$□

□ $f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$□

□ $x\in(0,1)$ □□ $f'(x)>0$ □□□ $f(x)$ □□□□□

□ $x\in(1,+\infty)$ □□ $f'(x)<0$ □□□ $f(x)$ □□□□□

□□□ $x=1$ □□□□ $f(x)$ □□□□□□□□□□□□ f□1□ $=\frac{1}{e}$ □

□2□□□ $g(x)=f(x)-m$ □□□□□□□□□□□ $f(x)=\frac{x}{e^x}(x>0)$ □□□□□□ $y=m$ □□□□□□

□ $x=0$ □□ $f(0)=0$ □ $x\to+\infty$ □□ $f(x)\to 0$ □

□□□1□□□□□□□ $0<m<\frac{1}{e}$ □

□3□□□ $f(x)>0$ □□□□□□ $f^2(x)-af(x)>0$ □□□□□□□□

□ $f(x)>a$ □□□□□□□□□□ $f(x)$ □□□□□ f□1□ $=\frac{1}{e}$ □ $0<1<2$ □

f□2□ $=\frac{2}{e^2}$ □

□□□ $a\in[\frac{2}{e^2}$ □ $\frac{1}{e})$ □□ $f(x)>a$ □□□□□□□ $x=1$ □

□□ $a\in[\frac{2}{e^2}$ □ $\frac{1}{e})$ □□□□□ $f^2(x)-af(x)>0$ □□□□□□□ $x=1$ □

□□□□ a □□□□□□ $[\frac{2}{e^2}$ □ $\frac{1}{e})$ □

8□□□□□ $f(x)=\frac{lnx}{x}$ □

□1□□ $f(x)$ □ $[2$ □ $a](a>2)$ □□□□□□

□2□□□□ x □□□□ $f^2(x)+mf(x)>0$ □□□□□□□□□□□□□□ m □□□□□□

□□□□□□□1□□□ $f(x)=\frac{lnx}{x}$ □ $f'(x)=\frac{1-lnx}{x^2}$ □

□□□ $x\in(0,e)$ □□ $f'(x)=\frac{1-lnx}{x^2}>0$ □

$x\in(e,+\infty)$ □□ $f'(x)=\frac{1-lnx}{x^2}<0$ □

□□□ $f(x)$ □ $(0,e)$ □□□□□□□ $(e,+\infty)$ □□□□□□

□ $2<a\leq e$ □□ $f(x)$ □ $[2$ □ $a]$ □□□□□ $f(x)$ □□□□ f □2□ $=\frac{ln2}{2}$ □

□ $a>e$ □□ $f(x)$ □ $[2$ □ $e]$ □□□ $f(x)$ □ $[e$ □ $a]$ □□□

□□□ f □4□ $=\frac{ln4}{4}=\frac{ln2}{2}=f$ □2□□

□□□ $4\geq a>e$ □□ $f(x)$ □□□□ f □2□ $=\frac{ln2}{2}$ □

$a>4$ □□ $f(x)$ □□□□ f □a□ $=\frac{lna}{a}$ □

□□□□□ $2<a\leq 4$ □□ $f(x)$ □□□□ f □2□ $=\frac{ln2}{2}$ □

$a>4$ □□ $f(x)$ □□□□ f □a□ $=\frac{lna}{a}$ □

□2□□□□□ $f^2(x)+mf(x)>0$ □□ $f(x)[f(x)+m]>0$ □

□ $m<0$ □□□□□ $f(x)<0$ □ $f(x)>-m$ □

□□ $f(x)$ □ $(0,e)$ □□□□□□□ $(e,+\infty)$ □□□□□□

□□ $f(x)$ □□□□□ f □e□ $=\frac{1}{e}$ □□□ $x>1$ □□ $f(x)=\frac{lnx}{x}>0$ □

□□□ $f(x)<0$ □□□□□ $(0,1)$ □□□□□□

□□□ x □□□□ $f^2(x)+mf(x)>0$ □□□□□□□□

□□ $f(x)>-m$ □□□□□□□□□□

□□ f □5□ $\leq -m<f$ □2□ $=f$ □4□ $<f$ □3□

□□□□□□ 2□3□4□

□□□ $\frac{ln5}{5}\leq -m<\frac{ln2}{2}$ □□□□ $-\frac{ln2}{2}<m\leq -\frac{ln5}{5}$ □

□$m=0$□□ $f^2(x)+mf(x)>0$□ $f(x)\neq 0$□

□□□□x□□□□ $f^2(x)+mf(x)>0$□□□□□□□□□□□□□□□□□

□$m>0$□□ $f^2(x)+mf(x)>0$□□□□ $f(x)<-m$□ $f(x)>0$□

□□ $f(x)>0$□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□m□□□□□□□ $(-\frac{\ln 2}{2}$□$-\frac{\ln 5}{5}]$□

9□□□□□ $f(x)=\frac{\ln(2x)}{x}$□

(I)□ $f(x)$□□□$[1$□$a](a>1)$□□□□□□

(II)□□□x□□□□ $f^2(x)+mf(x)>0$□□□□□□□□□□□ m□□□□□□

□□□□□□□I□ $f'(x)=\frac{1-\ln(2x)}{x^2}$□□ $f'(x)>0$□ $f(x)$□□□□□□ $(0,\frac{e}{2})$□

□ $f'(x)<0$□ $f(x)$□□□□□□ $(\frac{e}{2}$□$+\infty)$

□ $x\in[I$□$a]$□□□ $1<a\leqslant\frac{e}{2}$□□ $f(x)$□$[1$□$a]$□□□□□□

$f(x)$□□□□□ f□1□$=\ln 2$□

□ $a>\frac{e}{2}$□□ $f(x)$□$[1$□$\frac{e}{2})$□□□□□□□ $(\frac{e}{2}$□$a]$□□□□□□ f□2□$=\frac{\ln 4}{2}=\ln 2=f$□1□□□

$\therefore \frac{e}{2}<a\leqslant 2$□ $f(x)$□□□□□ f□1□$=\ln 2$□

□$a>2$□ $f(x)$□□□□□ f□a□$=\frac{\ln 2a}{a}$□

□□□□$1<a\leqslant 2$□□ $f(x)$□□□□□ f□1□$=\ln 2$□

□ $a>2$ □ $f(x)$ □□□□□ f □a□ $=\frac{\ln 2a}{a}$ □

□II□□□I□□□ $f(x)$ □□□□□□ $(0,\frac{e}{2})$ □□□□□□ $(\frac{e}{2}$ □ $+\infty)$ □□□ $(\frac{e}{2}$ □ $+\infty)$ □ $\ln 2x>\ln e=1>0$ □

□ $x>0$ □□ $f(x)>0$ □□ $f(\frac{1}{2})=0$ □

$\therefore m>0$ □□□□□□ $f^2(x)+mf(x)>0$ □ $f(x)>0$ □ $f(x)<-m$ □□ $f(x)>0$ □□□ $(\frac{1}{2}$ □ $+\infty)$ □□□□□□□□□□□□□□□□

$m=0$ □□□□□□ $f^2(x)+mf(x)>0$ □ $f(x)\neq 0$ □□□□ $(0$ □ $\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2}$ □ $+\infty)$ □□□□□□□□□□□□□□□□

$m<0$ □□□□□□ $f^2(x)+mf(x)>0$ □ $f(x)>-m$ □ $f(x)<0$ □ $f(x)<0$ □□□ $(0,\frac{1}{2})$ □□□□□□□□□ $f^2(x)+mf(x)>0$

□□□□□□□ f □3□ $\leqslant -m<f$ □1□ $=f$ □2□□

$\therefore -\ln 2<m\leqslant -\frac{1}{3}\ln 6$

□□□□□ m □□□□□□ $(-\ln 2$ □ $-\frac{1}{3}\ln 6]$

10□□□□□ $f(x)=\frac{\ln(2x)}{x}$

□1□□ $f(x)$ □ $[1$ □ $a](a>1)$ □□□□□□

□2□□□□ x □□□ $f^2(x)+mf(x)>0$ □□□□□□□□□□□ m □□□□□□

□□□□□□□1□□□ $f(x)=\frac{\ln(2x)}{x}$ □ $f'(x)=\frac{1-\ln(2x)}{x^2}$ □

□ $f'(x)>0$ □□□ $0<x<\frac{e}{2}$ □□ $f(x)$ □□□□□□ $(0,\frac{e}{2})$ □

□ $f'(x)<0$ □□□ $x>\frac{e}{2}$ □□□ $f(x)$ □□□□□□ $(\frac{e}{2},+\infty)$ □

$x\in[1, a](a>1)$

$1<a\leqslant \frac{e}{2}$ $f(x)$ $[1, a]$ $f(x)$ $f(1)=\ln 2$

$a>\frac{e}{2}$ $f(x)$ $[1,\frac{e}{2})$ $(\frac{e}{2},a]$

$f(2)=\ln 2=f(1)$

$\therefore \frac{e}{2}<a\leqslant 2$ $f(x)$ $f(1)=\ln 2$

$a>2$ $f(x)$ $f(a)=\frac{\ln(2a)}{a}$

$1<a\leqslant 2$ $f(x)$ $\ln 2$ $a>2$ $f(x)$ $\frac{\ln(2a)}{a}$

(2) (1) $f(x)$ $(0,\frac{e}{2})$ $(\frac{e}{2},+\infty)$ $(\frac{e}{2},+\infty)$ $\ln(2x)>\ln e=1>0$ $x>0$ $f(x)>0$

$f(\frac{1}{2})=0$

$\therefore m>0$ $f^2(x)+mf(x)>0$ $f(x)>0$ $f(x)<-m$

$f(x)>0$ $(\frac{1}{2},+\infty)$

$m=0$ $f^2(x)+mf(x)>0$ $f(x)\neq 0$ $(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$

$m<0$ $f^2(x)+mf(x)>0$ $f(x)<0$ $f(x)>-m$

$f(x)<0$ $(0,\frac{1}{2})$

$f^2(x)+mf(x)>0$ $f(3)\leqslant -m<f(1)=f(2)$

$\therefore -\ln 2<m\leqslant -\frac{1}{3}\ln 6$

m $(-\ln 2,-\frac{1}{3}\ln 6]$

11□□□□□ $f(x)=x-1$□$g(x)=(ax-1)e^{x}$□

□I□□ $h(x)=x-\dfrac{f(x)}{e^{x}}$ □□□□□□ $h(x)$ □□□□□□□□

□II□□ $af(x)>g(x)$ □□□□□□□□□□□ a □□□□□□

□□□□□□ $(I)\ h(x)=x-\dfrac{f(x)}{e^{x}}=x-\dfrac{x-1}{e^{x}}$ □ $h'(x)=\dfrac{e^{x}+x-2}{e^{x}}$ □

□ $u(x)=e^{x}+x-2$ □ R □□□□□□

□ $u(0)=-1$ □ u□1□$=e-1>0$□

$\therefore$ □□□□ $x_0\in(0,1)$ □□□ $u(x_0)=0$ □□ $h'(x_0)=0$ □

$x\in(-\infty,x_0)$ □ $h'(x)<0$ □□□□□ $h(x)$ □□□□□ $x\in(x_0$ □ $+\infty)$ □ $h'(x)>0$ □□□ $h(x)$ □□□□□

$\therefore x=x_0$ □□□□□□□□□□□□

□II□ $af(x)>g(x)$ □□□ $a(x-\dfrac{f(x)}{e^{x}})<1$ □□ $ah(x)<1$ □

① □ $a\leq 0$ □□□□□□□□□□□

$\therefore h(x)$ □ $x\in Z$ □□ $h(x)\geq 1$ □

$\therefore ah(x)<1$ □□□□□□□□

② □ $0<a<1$ □□ $h(x)<\dfrac{1}{a}$ □□ $\dfrac{1}{a}>1$ □ $h(0)=h$□1□$=1$□

$\therefore$ □□□□□□□□□□ 0□1 □□ $\begin{cases} h(2)\geq\dfrac{1}{a} \\ h(-1)\geq\dfrac{1}{a}\end{cases}$ □□□□ $\dfrac{e^{2}}{2e^{2}-1}\leq a<1$ □

③ □ $a\geq 1$ □□ $h(x)\leq\dfrac{1}{a}$ □□ $\dfrac{1}{a}\leq 1$ □

$\therefore h(x)$□$x\in Z$□□□□□□1□∴ □□□ $ah(x)<1$ □□□□□

□□□□□ $\frac{e^2}{2e^2-1}\le a<1$ □

12□□□□□ $f(x)=a(x-1)$□$g(x)=e^x(bx-1)$□$a\in R$□

□1□□ $b=2$ □□□□ $y=f(x)-g(x)$ □□□□□□□ a □□□□□□

□2□□ $b=a$ □□□□□ $f(x)>g(x)$ □□□□□□□□□□□ a □□□□□□

□□□□□□□1□□ $b=2$ □□ $g(x)=e^x(2x-1)$□

□ $y=f(x)-g(x)$ □□ $f(x)=g(x)$ □□ $a=\frac{e^x(2x-1)}{x-1}(x\neq 1)$□

□ $F(x)=\frac{e^x(2x-1)}{x-1}(x\neq 1)$□

□ $F'(x)=\frac{e^x x(2x-3)}{(x-1)^2}$□

□□ $F(x)$□$(-\infty,0)$□□□□□$(0,1)$□□□□□$(1,\frac{3}{2})$□□□□□$(\frac{3}{2},+\infty)$□□□□

□□ $F(x)_{\text{□□□}}=F(0)=1$□$F(x)_{\text{□□□}}=F\left(\frac{3}{2}\right)=4e^{\frac{3}{2}}$□

□□ $y=f(x)-g(x)$ □□□□□□

□ $a\in(0,1)\cup(4e^{\frac{3}{2}},+\infty)$□

□□□□□□$(0,1)$□□□ $g(x)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□1□$4e^{\frac{3}{2}}$□□□□ $f(x)$□□□ $g(x)$□□□□□□

□2□□ $b=a$ □□□ $f(x)>g(x)$□$a(x-\frac{x-1}{e^x})<1$□

$h(x)=x-\frac{x-1}{e^x}$ $h'(x)=\frac{e^x+x-2}{e^x}$

$\varphi(x)=e^x+x-2$ $\varphi'(x)=e^x+1>0$ $\varphi(x)$ R

$\varphi(0)=-1<0$ $\varphi(1)=e-1>0$ $\varphi(x)$ R $x_0\,(0,1)$

$h(x)$ $(-\infty,x_0)$ $(x_0, +\infty)$

$\therefore h(x)_{min}=h(x_0)=\frac{x_0\cdot e^{x_0}-x_0+1}{e^{x_0}}$

$e^x>x+1$ $h(x_0)=\frac{x_0\cdot e^{x_0}-x_0+1}{e^{x_0}}>\frac{x_0^2+1}{e^{x_0}}>0$

$x\leqslant 0$ $h(x)\geqslant h(0)=1>0$ $x\geqslant 1$ $h(x)\geqslant h(1)=1$

① $a\leqslant 0$ $ah(x)\leqslant 0<1$ $ah(x)<1$

② $a\geqslant 1$ $\frac{1}{a}\leqslant 1$ $h(x)$ $(-\infty, 0]$ $[1, +\infty)$

$x\in Z$ $h(x)\geqslant min\{h(0), h(1)\}=1\geqslant\frac{1}{a}$ $h(x)<\frac{1}{a}$

③ $0<a<1$ $\frac{1}{a}>1$ $h(0)=h(1)=1<\frac{1}{a}$ 0 1 $h(x)<\frac{1}{a}$

$h(x)<\frac{1}{a}$ $h(1)\geqslant\frac{1}{a}$ $h(2)\geqslant\frac{1}{a}$ $a\geqslant\frac{e^2}{2e^2-1}$

$a\in[\frac{e^2}{2e^2-1}, 1)$

13 $f(x)=mx^{\alpha}$ $A(2,2)$

1 $2lnf$ 3 $3lnf$ 2

□2□□□□ R □□□□ $g(x)$ □□ $g(-x)=g(x)$ □ $g(4+x)=g(4-x)$ □□□ $x\in[0$ □ $4]$ □□ $g(x)=\begin{cases}1-f(x), x\in[0,1)\\ \frac{lnx}{x}, x\in[1,4]\end{cases}$ □□□□ x

□□□□ $g^2(x)+ng(x)>0$ □ $[-200$ □ $200]$ □□□□□ 151 □□□□□□□□ n □□□□□□

□□□□1□□□□□ $f(x)$ □□□□□□ $m=1$ □□ $f(x)=x^a$ □□□□□□ $A(2,2)$ □

□ $2^a=2$ □□ $a=1$ □□ $f(x)=x$ □□□

$2lnf$ □3□ $=2ln3=ln9$ □ $3lnf$ □2□ $=3ln2=ln8<ln9$ □□ $2lnf$ □3□ $>3lnf$ □2□□

□2□□□□□ $g(x)$ □□ $g(-x)=g(x)$ □□ $g(x)$ □□□□□□ $g(4+x)=g(4-x)$ □□□□□□□□ $x=4$ □□□

□□□□□□□ $g(x)=g(8-x)$ □□ $g(x)=g(-x)$ □□□ $g(8-x)=g(-x)$ □□ $g(8+x)=g(x)$ □□□□ $g(x)$ □□□□ $T=8$ □

□□□ $g(x)=\begin{cases}1-x, x\in[0,1)\\ \frac{lnx}{x}, x\in[1,4]\end{cases}$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□ $y=\frac{lnx}{x}$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $y=\frac{lnx}{x}$ □□□ $(0,e)$ □□□□□□□□ $(e,+\infty)$ □□□□□□□□□ $\frac{1}{e}$ □

□□□□ $g^2(x)+ng(x)>0$ □□ $g(x)(g(x)+n)>0$ □

□□□ $\begin{cases}g(x)>0\\ g(x)>-n\end{cases}$ □□□ $\begin{cases}g(x)<0\\ g(x)<-n\end{cases}$ □□□□□□□□□□□□□□

□□□ $\begin{cases}g(x)>0\\ g(x)>-n\end{cases}$ □□□□□

① □ $n<0$ □□ $-n>0$ □□□□□□□□□□□ $g(x)>-n$ □□ $g(x)>-n$ □□ $[-200$ □ $200]$ □□□□□ 151 □□□□□

□□□□□□□□□ $(0$ □ $200]$ □□□□□ $\frac{151-1}{2}=75$ □□□□□□□□□ $(0$ □ $8]$ □□□□□ 3 □□□□□

□□□□□□ $y=-n$ □□□ $(0$ □ $8]$ □ $g(x)$ □□□□□□□□ $-n\geq\frac{ln2}{2}$ □ $-n<\frac{ln3}{3}$ □□ $g(x)>-n$ □□□□□□ $(0$ □ $8]$ □□ $x=3$ □□ $x=5$

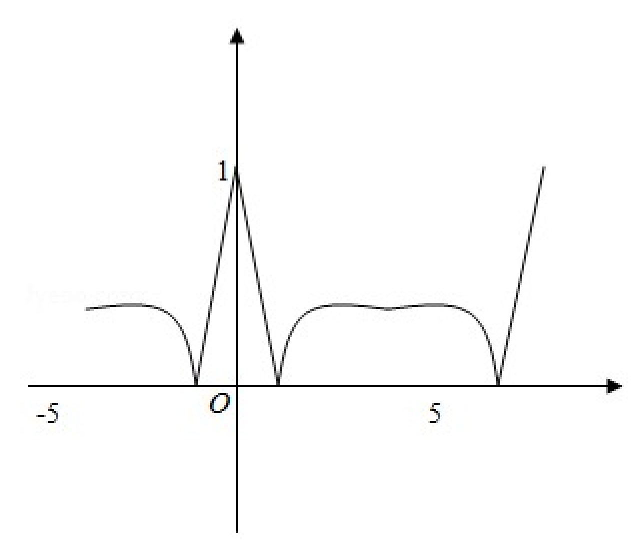
□□ $x=8$ □□□□□□□□□□ $\frac{ln2}{2}=\frac{ln4}{4}<\frac{ln3}{3}$ □

□□□ $\frac{\ln 2}{2} \leq -n < \frac{\ln 3}{3}$ □□ $-\frac{\ln 3}{3} < n \leq -\frac{\ln 2}{2}$ □□□ $n<0$ □

② □ $n \geq 0$ □□□□□ $g(x)>0$ □ $[-200$ □ $200]$ □□□□□ 151 □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $(0$ □ $8]$ □□□□ $g(x)>0$ □□□□□

2□3□4□5□6□8□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□ n □□□□□□ $-\frac{\ln 3}{3} < n \leq -\frac{\ln 2}{2}$ □



14□□□□□ $f(x)=e^x(2x-1)-ax+a(a\in R)$ □ e □□□□□□□□□

□1□□ $a=1$ □□

① □□□ $f(x)$ □ $x=-\frac{1}{2}$ □□□□□□□

② □□□ $f(x)$ □□□□□□

□2□□□□□□□□□ x_0 □□□ $f(x_0)<0$ □□□□ a □□□□□□

□□□□□□□1□□ $a=1$ □□ $f(x)=e^x(2x-1)-x+1$ □ $\therefore f'(x)=e^x(2x+1)-1$ □

① $\therefore f'(-\frac{1}{2})=-1$ □□ $f(-\frac{1}{2})=-2e^{-\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}$ □

$\therefore$ □□ $f(x)$ □ $x=-\frac{1}{2}$ □□□□□□□□ $y-(-2e^{-\frac{1}{2}}+\frac{3}{2})=-1(x+\frac{1}{2})$ □□□ $y+x+2e^{-\frac{1}{2}}-1=0$ □

② $f'(x)=e^x(2x+1)-1$，

由于 $f'(0)=0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$e^x>1$，$2x+1>1$，$\therefore f'(x)>0$；当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$0<e^x<1$，$2x+1<1$，$\therefore f'(x)<0$，

$\therefore$函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

(2) 由 $f(x)<0$ 得 $e^x(2x-1)<a(x-1)$，

当 $x=1$ 时，不等式显然不成立；当 $x>1$ 时，$a>\dfrac{e^x(2x-1)}{x-1}$；当 $x<1$ 时，$a<\dfrac{e^x(2x-1)}{x-1}$，

设 $g(x)=\dfrac{e^x(2x-1)}{x-1}$，$\therefore$ $g'(x)=\dfrac{e^x(2x^2-3x)}{(x-1)^2}=\dfrac{e^x x(2x-3)}{(x-1)^2}$，

$\therefore$函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(\frac{3}{2},+\infty)$ 上为增函数，在 $(0,1)$ 和 $(1,\frac{3}{2})$ 上为减函数，

$\therefore$当 $x>1$ 时，$a>g(\frac{3}{2})=4e^{\frac{3}{2}}$，当 $x<1$ 时，$a<g(0)=1$，

① 当 $a<1$ 时，$x_0\in(-\infty,1)$，由 $f(x_0)<0$ 得，$g(x_0)<a$，又 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在区间 $(0,1)$ 上单调递减，且 $g(0)=1>a$，

$\therefore g(-1)\leqslant a$，即 $a\geqslant\frac{3}{2e}$，$\therefore \frac{3}{2e}\leqslant a<1$，

② 当 $a>4e^{\frac{3}{2}}$ 时，$x_0\in(1,+\infty)$，由 $f(x_0)<0$ 得，$g(x_0)<a$，又 $g(x)$ 在区间 $(1,\frac{3}{2})$ 上单调递减，在区间 $(\frac{3}{2},+\infty)$ 上单调递增，且

$g(\frac{3}{2})=4e^{\frac{3}{2}}<a$，

$\therefore \begin{cases} g(2)<a \\ g(3)\geqslant a \end{cases}$，解得：$3e^2<a\leqslant\frac{5e^3}{2}$，

综上所述，a 的取值范围为 $[\frac{3}{2e},1)\cup(3e^2,\frac{5e^3}{2}]$.

15. 已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-\frac{a}{2}x^2$，其中 $a\in R$.

□I□□□ $f(x)$ □□□□□ x □□□□□□□□□ a □□□□□□□□□

□II□□□□□□ a □□□□□ $x_1 \in R$ □ $x_2 \in (0,+\infty)$ □□□ $f(x_1+x_2)-f(x_1-x_2)>-2x_2$ □□□

□□□□□□I□ $f'(x)=xe^x-ax$ □

□□□ $f(x)$ □□□ x □□□□ $(t,0)$ □

□□ $\begin{cases} f(t)=0 \\ f'(t)=0 \end{cases}$ □□ $\begin{cases} (t-1)e^t-\dfrac{a}{2}t^2=0 \\ te^t-at=0 \end{cases}$ □

□□ $t\neq0$ □ $e^t=a>0$ □□□□ $(t-1)e^t-\dfrac{a}{2}t^2=0$ □□□ $t^2-2t+2=0$ □

□ $\triangle=-4<0$ □ $\therefore$ □□ $t^2-2t+2=0$ □□□

□□□ a □□□□□ $f(x)$ □□□□□□ x □□□

□II□□□□ $f(x_1+x_2)-f(x_1-x_2)>(x_1-x_2)-(x_1+x_2)$

$\Leftrightarrow f(x_1+x_2)+(x_1+x_2)>f(x_1-x_2)+(x_1-x_2)$ □□□

□ $g(x)=f(x)+x$ □□□□□□ $g(x_1+x_2)>g(x_1-x_2)$ □

□□ $g(x_1+x_2)>g(x_1-x_2)$ □□□ $x_1\in R$ □ $x_2\in(0,+\infty)$ □□□□□ $g(x)=(x-1)e^x-\dfrac{a}{2}x^2+x$ □ R □□□□□

$\therefore g'(x)=xe^x-ax+1..0$ □ R □□□□

□ g' □1□ $=e-a+1..0$ □□ $a,, e+1$ □

$\therefore g'(x)..0$ □ R □□□□□□□□□ $a,, e+1$ □

□□□□□ $a=3$ □□ $xe^x-3x+1..0$ □□□

□ $h(x)=e^x-x-1$ □□ $h'(x)=e^x-1$ □

当 $x<0$ 时，$h(x)<0$，当 $x>0$ 时，$h(x)>0$，

$\therefore h(x)_{min}=0$，即 $\forall x\in R$，$e^x\geq x+1$.

那么，当 $x\geq 0$ 时，$xe^x\geq x^2+x$，$xe^x-3x+1\geq x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0$；

当 $x<0$ 时，$e^x<1$，$xe^x-3x+1=x(e^x-3+\frac{1}{x})>0$，$\therefore xe^x-3x+1\geq 0$ 恒成立.

因此，a 的最大整数值为 3.